

MIMO 伝送路における 到来角分布による空間相関を考慮した 平均 BER に関するユニオン・バウンド

野田 直史, 府川 和彦, 鈴木 博
東京工業大学

概要

- 研究背景
- 到来角分布に依存した空間相関を有する MIMO 伝送路 (ガウス分布, ラプラス分布, ベキ乗分布)
- 空間相関を考慮した平均 BER のユニオン・バウンドの理論的導出
- 理論と計算機シミュレーションとの比較
- まとめ

研究背景

MIMO (Multiple-Input Multiple-Output)

- 高速・高信頼の移動通信を実現する伝送方式
 - SDM: 独立の信号系列を送信
 - STBC: 時空間ブロック符号化された信号系列を送信

➡ SDM の特性評価や STBC の符号設計という観点から平均 BER に関する理論的な研究が重要

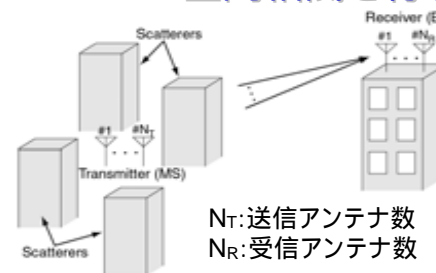
平均 BER のユニオン・バウンド

- 空間相関を考慮したバウンドは既に解析的に導出されている
- 到来角分布に起因する空間相関の検討は **不十分** (移動通信上り回線)



基地局への受信到来角分布に起因する空間相関を考慮した平均 BER のユニオン・バウンドを導出する

空間相関を有する MIMO 伝送路



移動通信上り回線

- 基地局への受信到来波
 - ➡ 角度広がりが小さい
- 送信 (移動局) 側チャンネル相関
 - ➡ **無相関**

クロネッカー・モデルによる近似

$N_R \times N_T$ インパルス応答行列

$$\mathbf{H} \simeq \mathbf{R}_r^{1/2} \mathbf{G} \mathbf{R}_t^{1/2} \quad \text{平方根行列}$$

$$= \mathbf{R}_r^{1/2} \mathbf{G}$$

- \mathbf{R}_r : 受信側チャンネル相関
- \mathbf{R}_t : 送信側チャンネル相関
- $(\mathbf{G})_{ij}$: 平均 0, 分散 1 の複素ガウス

MIMO 伝送路の相関行列

$$\mathbf{R}_h = \langle \mathbf{h} \mathbf{h}^H \rangle = \mathbf{R}_r \otimes \mathbf{I}_{N_T}$$

クロネッカー積

単位行列

$$\mathbf{h} = \text{vec}(\mathbf{H}^T) \quad \text{vec}(\cdot): \text{ベクトル化演算子}$$

- \mathbf{T} : 転置
- \mathbf{H} : 複素共役転置
- $\langle \cdot \rangle$: アンサンブル平均

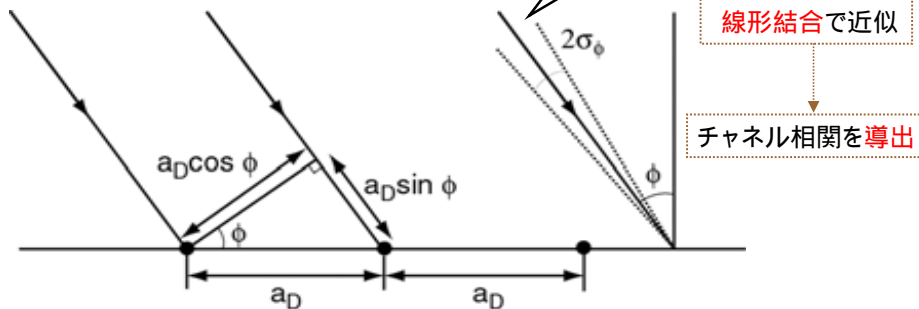
受信側チャネル相関

- 線形アレー・アンテナを想定

$$(\mathbf{R}_r)_{l_1 l_2} = \langle \exp(-j\hat{\theta} \sin \phi) \rangle$$

$$\hat{\theta} = 2\pi a_D (l_1 - l_2) / \lambda$$

a_D : 素子間隔 λ : 波長 ϕ : 到来角

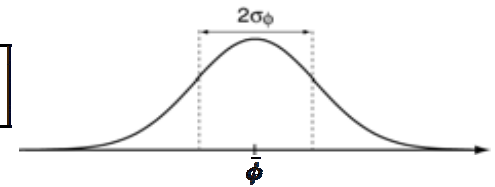


ガウス分布における受信側チャネル相関

到来角分布としてガウス分布を仮定
(ガウス形入射角分布環境)

$$p(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \exp\left[-\frac{(\phi - \bar{\phi})^2}{2\sigma_\phi^2}\right]$$

$\bar{\phi}$: 平均到来角 σ_ϕ : 角度広がり



$\sigma_\phi \ll 1$ のとき

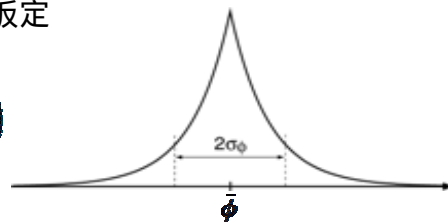
$$(\mathbf{R}_r)_{l_1 l_2} \simeq \exp\left[-\frac{\sigma_\phi^2 \hat{\theta}^2 \cos^2 \bar{\phi}}{2}\right] \times \exp\left[-j\left(1 - \frac{\sigma_\phi^2}{2}\right) \hat{\theta} \sin \bar{\phi}\right]$$

角度広がり
小さい \Rightarrow アンテナ素子間の
相関が大きくなる

ラプラス分布における受信側チャネル相関

到来角分布としてラプラス分布を仮定
(ラプラス形入射角分布環境)

$$p(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_\phi} |\phi - \bar{\phi}|\right)$$



N 個のガウス分布の線形結合で近似 (平均 $\bar{\phi} + \mu_i$, 分散 σ^2)

$$\hat{p}(\phi) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\phi - \bar{\phi} - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$\int \hat{p}(\phi) d\phi = 1$
を満足するため

$$\mu_i = (i - [N/2])\sigma \quad \sum_{i=1}^N A_i = 1$$

$\{A_i | 1 \leq i \leq N\}$ の最適値

評価関数

$$f(\{A_i | 1 \leq i \leq N\}) = \int_{-\infty}^{\infty} |p(\phi) - \hat{p}(\phi)|^2 d\phi - \lambda_{\text{lag}} \left(\sum_{i=1}^N A_i - 1 \right)$$

λ_{lag} : Lagrange の未定乗数

評価関数を最小とする $\{A_i | 1 \leq i \leq N\}$ を $\{\hat{A}_i | 1 \leq i \leq N\}$ とすると $\mathbf{w}^T = [\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_N]$ は

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{b} + \frac{1 - \mathbf{b}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e}} \mathbf{e} \right)$$

$$\mathbf{b}^T = [b_1, b_2, \dots, b_N] \quad b_i = \exp\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_\phi^2} - \frac{\sqrt{2}\mu_i}{\sigma_\phi}\right) \text{erfc}\left(\frac{\sigma}{\sigma_\phi} - \frac{\mu_i}{\sqrt{2}\sigma}\right) / \sqrt{2}\sigma_\phi$$

$$\mathbf{e}^T = [1, 1, \dots, 1]$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\mu_i - \mu_j)^2}{4\sigma^2}\right] + \exp\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_\phi^2} + \frac{\sqrt{2}\mu_i}{\sigma_\phi}\right) \text{erfc}\left(\frac{\sigma}{\sigma_\phi} + \frac{\mu_i}{\sqrt{2}\sigma}\right) / \sqrt{2}\sigma_\phi$$

ラプラス分布における受信側チャンネル相関

$\sigma \ll 1$ のとき

$$(\mathbf{R}_r)_{l_1 l_2} \simeq \sum_{i=1}^N A_i \exp \left[-\frac{\sigma^2 \hat{\theta}^2 \cos^2(\bar{\phi} + \mu_i)}{2} \right]$$

$$\times \exp \left[-j \left(1 - \frac{\sigma^2}{2} \right) \hat{\theta} \sin(\bar{\phi} + \mu_i) \right]$$

べき乗分布における受信側チャンネル相関

到来角分布としてべき乗分布を仮定 (べき乗形入射角分布環境)

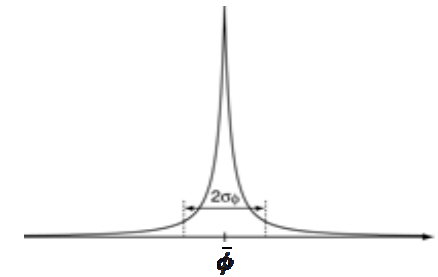
$$p(\phi) = \frac{90(\kappa - 1)}{\pi \beta^{-\kappa + 1}} \left(\frac{180}{\pi} |\phi - \bar{\phi}| + \beta \right)^{-\kappa}$$

$$\beta = -0.2D + 2.092 \left(\frac{\langle h_s \rangle}{h_b} \right)^{0.226} \quad \kappa = (-0.0152 \langle h_s \rangle + 0.629)D - 0.159 + 0.756 \log(h_b)$$

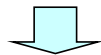
D : 送信移動局 - 受信基地局間距離 (km) $\langle h_s \rangle$: 周辺建物高 (m)

h_b : 受信基地局アンテナ高 (m)

測定により得られた式のため
角度広がり **4.4 度**のみで検討
($D=2, \langle h_s \rangle=20, h_b=50$)



N 個のガウス分布の線形結合で近似

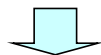


$\{\hat{A}_i | 1 \leq i \leq N\}$ はラプラス分布の場合と同様の結論

ただし

$$b_i = \frac{90\sqrt{2}(\kappa - 1)}{\pi^{\frac{3}{2}} \sigma \beta^{-\kappa + 1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{180}{\pi} |\phi| + \beta \right)^{-\kappa} \exp \left[-\frac{(\phi - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \right] d\phi$$

と再定義



ラプラス分布における $(\mathbf{R}_r)_{l_1 l_2}$ に
新しく求めた $\{\hat{A}_i | 1 \leq i \leq N\}$ を代入すればよい

平均 BER のユニオン・バウンド

$$P_b \leq \sum_{\mathbf{X}_0} p(\mathbf{X}_0) \sum_{\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_0} \frac{N_e(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1)}{N_b} p(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1)$$

ペアワイズ誤り確率

\mathbf{X}_0 : 真の送信信号行列 \mathbf{X}_1 : 誤って判定された送信信号行列

N_b : 送信ビット数 $N_e(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1)$: 誤りビット数

ペアワイズ誤り確率

$$p(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1) = \int_{\mathbf{h}} p(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1 | \mathbf{h}) p(\mathbf{h}) d\mathbf{h}$$

条件付きペアワイズ誤り確率

\mathbf{h} : チャンネルのインパルス応答ベクトル
(平均零ベクトル, 共分散行列 \mathbf{R}_h の複素ガウス過程)

$p(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1 | \mathbf{h})$ (最尤推定)

\mathbf{X}_0 に関するメトリックが \mathbf{X}_1 に関するメトリックより大きくなる確率

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{X}_0\|^2 > \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{X}_1\|^2 \quad \|\cdot\|: \text{Frobenius ノルム}$$

受信信号行列

$$2\Re\{\eta\} < -\|\mathbf{Z}\|^2$$

$$\eta = \text{Tr}[\mathbf{N}\mathbf{Z}^H]$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}(\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1)$$

\mathbf{N} : $N_R \times N_I$ 雑音行列

N_I : ブロック長

$\Re\{\cdot\}$: 複素数の実部

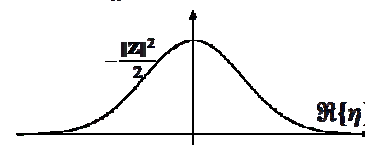
$\text{Tr}[\cdot]$: 行列トレース

$p(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1 | \mathbf{h})$ は $2\Re\{\eta\} < -\|\mathbf{Z}\|^2$ となる確率

η : 複素ガウスの線形結合

平均 0, 分散 $\sigma_\eta^2 = \sigma_n^2 \|\mathbf{Z}\|^2$

σ_n^2 : 平均雑音電力



$$\|\mathbf{Z}\|^2 = \mathbf{h}\mathbf{A}_{\text{ext}}\mathbf{h}^H$$

\mathbf{A}_{ext} : シンボル誤りに関する共分散行列

$$p(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1 | \gamma) = \frac{1}{2} \text{erfc} \sqrt{\gamma}$$

$$\gamma = \mathbf{h}^H \mathbf{A}_{\text{ext}} \mathbf{h} / 4\sigma_n^2$$

$$p(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1) = \int_{\mathbf{h}} p(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1 | \mathbf{h}) p(\mathbf{h}) d\mathbf{h}$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2} \text{erfc} \sqrt{\gamma} p(\gamma) d\gamma$$

確率密度関数 $p(\gamma)$ の導出

$p(\gamma)$ のラプラス変換 $p(s)$

$$p(s) = \int_0^\infty p(\gamma) e^{-s\gamma} d\gamma = \prod_{l=1}^r (1 + s\tilde{\lambda}_l)^{-m_l}$$

m_l : 重複度 $\tilde{\lambda}_l$: $\mathbf{R}_h \mathbf{A}_{\text{ext}} / 4\sigma_n^2$ の固有値

r : $\mathbf{R}_h \mathbf{A}_{\text{ext}} / 4\sigma_n^2$ の相異なる固有値の数

部分分数展開後, 逆ラプラス変換を行うと

$$p(\gamma) = \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{m_l} \frac{\pi_{lk}}{(k-1)! \tilde{\lambda}_l^k} \gamma^{k-1} \exp\left(-\frac{\gamma}{\tilde{\lambda}_l}\right)$$

π_{lk} : 各部分分数における係数

ペアワイズ誤り確率の導出

$$p(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1) = \int_0^\infty \frac{1}{2} \text{erfc} \sqrt{\gamma} p(\gamma) d\gamma$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{m_l} \pi_{lk} \left[1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (1 + \tilde{\lambda}_l)^n} \left(\frac{\tilde{\lambda}_l}{1 + \tilde{\lambda}_l}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 1$$

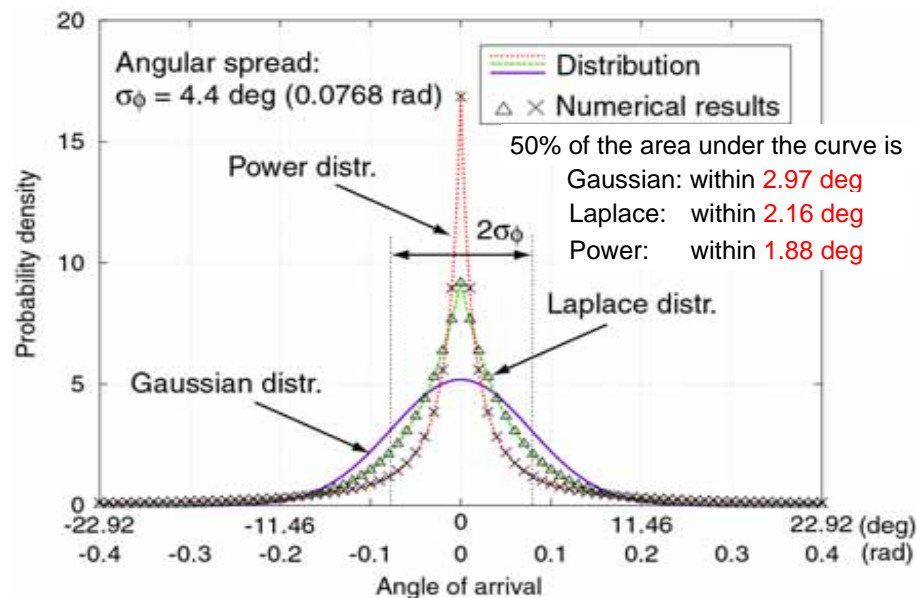
平均 BER のユニオン・バウンド

$$\begin{aligned}
 P_b &\leq \sum_{\mathbf{X}_0} p(\mathbf{X}_0) \sum_{\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_0} \frac{N_e(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1)}{N_b} p(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1) \\
 &= \sum_{\mathbf{X}_0} p(\mathbf{X}_0) \sum_{\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_0} \frac{N_e(\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_1)}{N_b} \\
 &\times \frac{1}{2} \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{m_l} \pi l k \left[1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (1 + \tilde{\lambda}_l)^n} \left(\frac{\tilde{\lambda}_l}{1 + \tilde{\lambda}_l} \right)^{\frac{1}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

システム諸元

変調方式	QPSK
OSTBC 符号化率 R	3/4
アンテナ数とアレー形状	送信: 4, 受信: 4, 線形アレー
チャンネル・モデル	クロネッカー・モデル
伝搬路	時不変フラット・フェージング
送信 (移動局) 側チャンネル相関	無相関
受信 (基地局) 側チャンネル相関	ガウス形, ラプラス形, ベキ乗形 入射角分布環境による相関
受信アンテナ素子間隔 a_D	4 波長 (アレー長: 12 波長)
受信平均到来角 $\bar{\phi}$	30 (deg)
受信角度広がり σ_ϕ	5, 4.4, 4, 3, 2, 1 (deg)
ガウス分布の線形結合数 N	1001 (ラプラス), 2001 (ベキ乗)
各ガウス分布の標準偏差 σ	10^{-3}
各ガウス分布の平均 $\bar{\phi} + \mu_i$	$\bar{\phi} + (i - \lceil N/2 \rceil)\sigma$

受信到来角分布の近似精度

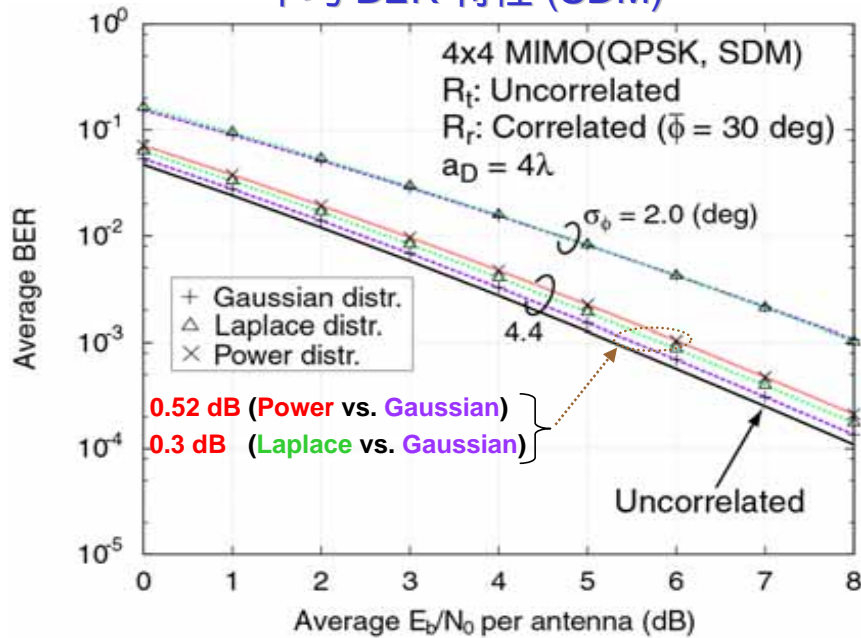


受信側チャンネル相関行列の精度

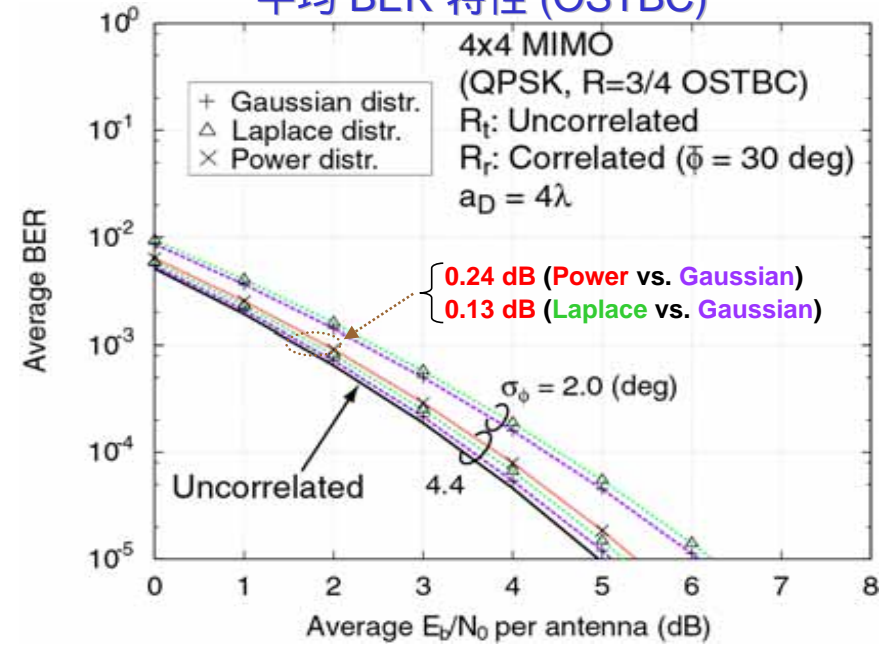
Angular spread	Distribution	$(\mathbf{R}_r)_{12}$	Error
4.4 deg	Gaussian	$0.2472 - 0.0092j$	2.562×10^{-2}
	Laplace	$0.4172 + 0.0087j$	8.145×10^{-4}
	Power	$0.4767 - 0.0052j$	6.315×10^{-3}
2.0 deg	Gaussian	$0.7493 - 0.0057j$	3.536×10^{-3}
	Laplace	$0.7763 - 0.0005j$	1.720×10^{-4}

シミュレーションとの差の絶対値

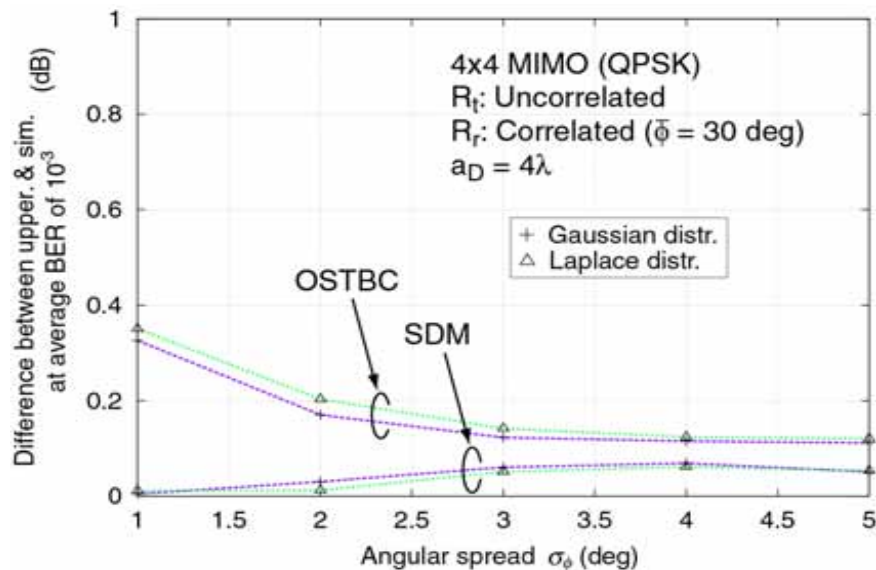
平均 BER 特性 (SDM)



平均 BER 特性 (OSTBC)



近似精度の到来角分布依存性



まとめ

MIMO 伝送路において、受信到来角に起因する空間相関を考慮した
 平均 BER のユニオン・バウンド

4x4 MIMO, 平均 BER が 10^{-3} において

ガウス分布からの E_b/N_0 劣化分 (角度広がり 4.4 度)

空間相関大 \rightarrow

分布 (面積50%幅)	ガウス分布 (2.97 度)	ラプラス分布 (2.16 度)	べき乗分布 (1.88 度)
SDM	0.0 dB	0.3 dB	0.52 dB
OSTBC	0.0 dB	0.13 dB	0.24 dB

シミュレーションとの比較

- シミュレーション結果とよく一致
 - 近似精度は受信到来角分布に依存しない
- \rightarrow 角度広がりへの依存性はバウンドの問題